Operatoralgebren WS 2018/19

Sei H ein Hilbertraum und sei $L(H)$ der Raum der beschränkten Operatoren auf H.
Eine "Operatoralgebra" ist eine Unteralgebra $A \subseteq L(H)$, d.h. A ist ein Untervektorraum von $L(H)$ mit:

$$S, T \in A \Rightarrow S \cdot T \in A.$$

Oft verlangt man zusätzlich dass A abg. bzgl. $\|\cdot\|_{op}$ und dass $T \in A \Rightarrow T^* \in A$ gilt.
In diesem Fall heißt A (konkrete) C^*-Algebra.

Bsp: Sei X kompakter T_2-Raum und sei $C(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig}\}$. Sei $\ell^2(X)$ der HR der quadrat-summierb. Fkt. auf X.
Dann erh. wir eine Abb.

$$M : C(X) \to L(\ell^2(X)) \; ; \; M(f)\xi = f \cdot \xi.$$

Man rechnet dann leicht nach, dass

$$\|M_f\|_{op} = \|f\|_\infty, \text{ d.h. } M \text{ ist isometr.}$$

und damit ist $C(X) \cong M(C(X)) \subseteq L(\ell^2(X))$.
Ferner gelten $M_{f \cdot g} = M_f M_g$, $(M_f)^* = M_{\bar{f}}$.
Wir können also $C(X)$ (vermöge M) mit der konkreten C^*-Alg. $A = M(C(X))$ identifizieren.

Umgekehrt werden wir lernen, dass man den Raum X bis auf Homöomorphie aus der Algebra A zurückgewinnen können.
Der erste Satz von Gelfand-Naimark liefert dann eine 1-1 Bez

$\{$kompakten T_2-Räumen $X\}$ $\longleftrightarrow$ (unitalen) kommutativen $\boxed{C^*\text{-Algebren}}$

Dieses Ergebnis liefert die Motivation alg. nichtkommut. C*-Algebren als "nichtkommut." top. Räume aufzufassen.
Tatsächlich kann man vielen matematischen Objekten ein (oder mehrere) C*-Algebren zuordnen, die wichtige Eigenschaften dieser Objekte wiederspiegeln. Bsp. sind

- Gruppenalgebren
- Algebren die zu dynamischen Systemen (= Gruppenwirkungen $G \curvearrowright X$) assoziiert sind.
- Gruppoidalgebren, etc.

In dieser Vorlesung wollen wir aufbauend auf d. FA. Analysis die Grundlagen d. Theorie d. C*-Algebren kennen lernen, und natürlich einige wichtige Bsp. untersuchen.

§1 Banachalgebren

1.1 Def (1) Sei A ein $\mathbb{C}$-VR versehen mit einer Multiplikation $m: A \times A \to A$; $(a,b) \mapsto a \cdot b$, d.h. m ist bilinear und assoziativ (also $(ab)c = a(bc)$). Dann heißt (A, m) eine (assoziative, komplexe) Algebra.
(2) Ist (A, m) eine Algebra und ist $\|\cdot\|: A \to [0,\infty)$ eine Norm auf A mit $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ $\forall a,b \in A$, so heißt $(A, m, \|\cdot\|)$ eine normierte Algebra.
Ist A zusätzlich vollständig bzgl. $\|\cdot\|$, so heißt

A Banachalgebra.

(3) Eine Algebra A heißt unital, falls ein Element $1_A \in A$ ex. mit $1_A \cdot a = a \cdot 1_A = a$ für alle $a \in A$.

(4) Eine Algebra A heißt kommutativ, falls für alle $a, b \in A$ gilt: $a \cdot b = b \cdot a$.

1.2 Beispiele: (1) Sei $P = \{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \mid n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C} \}$ der Raum aller komplexen Polynome, so ist P eine Algebra bzgl. Polynommultiplikation.

(2) Sei X ein top. Raum und $C_b(X) = \{ f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig + beschr.} \}$ versehen mit $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.
Dann ist $C_b(X)$ eine Banachalgebra bzgl. der Mult. $(f \cdot g)(x) = f(x) g(x)$.

(3) Erinnerung: Ein top. Hausdorffraum X heißt lokalkompakt, falls jedes $x \in X$ eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen besitzt. (z.B. $\mathbb{R}^n$, top. Mannigfaltigkeiten, diskrete Räume, ...).
Für eine Fkt. $f : X \to \mathbb{C}$ sagen wir dann: f verschwindet in ∞ (bez. $f(\infty) = 0$), falls für alle $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K_\varepsilon \subseteq X$ ex., sodass für alle $x \notin K_\varepsilon$ gilt: $|f(x)| < \varepsilon$.
Dann ist $C_0(X) = \{ f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig mit } f(\infty) = 0 \}$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $C_b(X)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$, also ist auch $(C_0(X), \|\cdot\|_\infty)$ eine kommutative Banachalgebra.
Ist X kompakt, so gilt $C_0(X) = C(X) = C_b(X)$ P

(4) Sei E ein Banachraum. Dann ist
$L(E) := \{T : E \to E \mid T \text{ linear + stetig}\}$
versehen mit $\|T\|_{op} := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$
eine unitale Banachalgebra mit $1 = id_E$
bzgl. der Multiplikation $(T,S) \mapsto T \circ S$
[$\forall x \in E$ gilt: $\|TSx\| = \|T(Sx)\| \leq \|T\|_{op} \|Sx\|$
$\leq \|T\|_{op} \|S\|_{op} \|x\|$ und damit $\|TS\|_{op} \leq \|T\|_{op} \|S\|_{op}$]

Beachte: Die Banachalg. $L(E)$ ist im allg. nicht kommutativ! Ist z.B. $E = \mathbb{C}^n$, so ist $L(E) \cong M_n(\mathbb{C})$ mit Matrixmultiplikation, und $M_n(\mathbb{C})$ ist kommut. g.d.w. $n = 1$ (allg. $L(E)$ kommut. g.d.w. $\dim(E) = 1$).

Viele Algebren, z.B. $C_0(X)$ für X lokalkompakt aber nicht kompakt, sind nicht unital! Für viele Konstruktionen ist es aber nötig, eine Eins zu haben. Hier hilft:

1.4 Ergänzung einer Eins

Sei A eine Algebra. Setze $A^1 := \{(a, \lambda) \mid a \in A, \lambda \in \mathbb{C}\}$ versehen mit der Multiplikation
$$(a,\lambda)(b,\mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$$
Dann ist A^1 eine Algebra mit Einselement $(0,1)$.
Ist A eine Banachalg., so wird A^1 bzgl.
$$\|(a,\lambda)\| := \|a\| + |\lambda|$$
eine unitale Banachalgebra. A^1 heißt Unitalisierung von A. (Bew: Nachrechnen!

z.B. $\|(a,\lambda)(b,\mu)\| = \|ab + \lambda b + \mu a\| + |\lambda\mu|$
$\leq \|ab\| + |\lambda| \|b\| + |\mu| \|a\| + |\lambda\mu| = (\|a\| + |\lambda|)(\|b\| + |\mu|)$
$= \|(a,\lambda)\| \|(b,\mu)\|$

1.5 Bemerkung: Die obige Konstruktion funktioniert auch, wenn A bereits eine Eins $1_A \in A$ besitzt. Wir erhalten dann eine neue Eins $1 \in A^1$, und 1_A ist dann keine Eins in A^1 mehr!
Wir werden oft $a + \lambda 1$ anstelle von (a, λ) für ein Element in A^1 schreiben. Dann erhält man die Mult. Regel direkt durch ausmultiplizieren:

$$(a+\lambda 1)(b+\mu 1) = (ab + \lambda b + \mu a) + \lambda\mu 1.$$

1.6 Definition Sei A eine (Banach)algebra. Wir setzen dann

$$\tilde{A} := \begin{cases} A^1, & \text{falls } A \text{ nicht unital} \\ A, & \text{falls } A \text{ unital} \end{cases}$$

1.7 Definition (Ideale) Sei A eine Algebra. Eine Unteralgebra $I \subseteq A$ heißt Rechtsideal (bzw. Linksideal) in A, falls für alle $b \in I, a \in A$ gilt:

$$ba \in I \quad (\text{bzw. } ab \in I).$$

$I \subseteq A$ heißt Ideal, wenn I sowohl Rechts- als auch Linksideal in A ist (oft sagt man dann auch: I ist "beidseitiges Ideal").

1.8 Bsp (1) Ist A eine bel. Algebra, so ist $A \cong \{(a,0) \mid a \in A\}$ ein Ideal in A^1, denn

$$(a,0)(b,\lambda) = (ab + \lambda a, 0) \in A$$
$$(b,\lambda)(a,0) = (ba + \lambda a, 0) \in A.$$

(2) Sei E ein Banachraum. Dann bilden die kompakten Operatoren $\mathcal{K}(E) \subseteq L(E)$ ein Ideal in $L(E)$, denn aus der FA wissen wir, dass $ST, TS \in \mathcal{K}(E)$ $\forall S \in \mathcal{K}(E), T \in L(E)$.

(3) Sei $A = C_0(X)$ mit X lokalkompakt und T_2 und sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge von X. Dann ist

$$I_Y := \{ f \in C_0(X) \mid f_{|Y} \equiv 0 \}$$

ein Ideal in $C_0(X)$. Insb. ist für jedes $x \in X$:

$$I_x := \{ f \in C_0(X) \mid f(x) = 0 \}$$

ein Ideal in $C_0(X)$.

__1.9 Satz__ Sei A eine Algebra, $I \subseteq A$ ein Ideal. Dann ist der Quotientenraum

$$A/_I = \{ a + I \mid a \in A \}$$

eine Algebra mit Multiplikation

$$(a+I)(b+I) = ab + I$$

__Bew:__ Wir zeigen nur, dass die Mult. auf $A/_I$ wohldef. ist. Seien dazu $a' = a + c$, $b' = b + d$ mit $c, d \in I$, so folgt

$$(a'+I)(b'+I) \overset{\text{def}}{=} a'b' + I = (a+c)(b+d) + I$$

$$= ab + \underbrace{c(b+d) + ad}_{\in I} + I = ab + I.$$ ☒

__1.10 Satz__ Sei A eine Banachalgebra und sei $I \subseteq A$ ein __abgeschlossenes__ Ideal. Dann ist $A/_I$ versehen mit der Quotientennorm

$$\| a + I \| = \inf \{ \| a + b \| \mid b \in I \}$$

wieder eine Banachalgebra.

__Bew:__ Aus der FA wissen wir, dass $A/_I$ ein Banachraum ist. Es bleibt dann zu zeigen, dass $\| (a+I)(b+I) \| \leq \| a + I \| \, \| b + I \| \ \forall a, b \in A$ gilt. Aber für alle $c, d \in I$ gilt:

$$\|(a+I)(b+I)\| = \|ab+I\| \leq \|ab + \overbrace{ad+cb+cd}^{\in I}\|$$
$$= \|(a+c)(b+d)\| \leq \|a+c\|\,\|b+d\|$$
und damit folgt
$$\|(a+I)(b+I)\| \leq \inf_{c,d\in I} \|a+c\|\,\|b+d\| = \|a+I\|\,\|b+I\|.$$
Die Quotientenabb. $q: A \to A/I$; $q(a) = a+I$ ist dann ein Algebrahomom. im Sinne von:

1.11 Definition Seien A, B Algebren. Eine Abb. $\phi: A \to B$ heißt (Algebra-) Homomorphismus, falls ϕ $\mathbb{C}$-linear mit $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ $\forall a,b\in A$. Sind A, B unital so heißt $\phi: A \to B$ unitaler Homom., falls zusätzlich $\phi(1_A) = 1_B$ gilt.

1.12 Bsp: Sei X ein top. Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge mit von X induz. Topologie. Dann ist $\phi: C_b(X) \to C_b(Y)$; $\phi(f) = f|_Y$ ein unitaler Homomorphismus.

Wir wollen nun die Gruppe der invertierbaren Elemente in einer (Banach-) Algebra betrachten.

1.13 Def. Sei A eine unitale Algebra. Ein Element $a\in A$ heißt invertierbar, falls ein Element $a^{-1}\in A$ ex. mit $a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = 1_A$.
Wir schreiben $G(A) := \{a\in A \mid a \text{ invertierbar}\}$.

1.14 Bem: (1) Das Element $a^{-1}\in A$ ist eindeutig, denn ist $b\in A$ ein weiteres Element mit $ba = ab = 1_A$, so folgt $b = 1_A b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1}1_A = a^{-1}$.

(2) $G(A)$ ist eine Gruppe bzgl. Mult. von A.
Denn: $a, b \in G(A)$, so $ab \in G(A)$ mit
$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

(3) Ist $I \subseteq A$ ein echtes Ideal in A, also $I \neq A$, so gilt $I \cap G(A) = \emptyset$, denn wäre $a \in I \cap G(A)$, so wäre $1_A = aa^{-1} \in I$, und dann $A = 1_A \cdot A \subseteq I$. Widerspruch!

1.15 Satz (Neumann-Reihe) Sei A eine unitale Banachalgebra. Ist dann $a \in A$ mit $\|a\| < 1$, so gilt $1_A - a \in G(A)$ mit
$$(1_A - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \quad (\text{wobei } a^0 := 1_A).$$

Bew: Da A Banachalg. gilt (mit Induktion) $\|a^n\| \leq \|a\|^n$ und da $\|a\| < 1$, folgt
$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a\|^n = \frac{1}{1 - \|a\|} < \infty$$
Damit ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ in A konvergent (siehe FA), und es folgt
$$(1_A - a)\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1_A \sum_{n=0}^{\infty} a^n - a \sum_{n=0}^{\infty} a^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n - \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} = a^0 = 1_A.$$
Analog folgt $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n\right)(1_A - a) = 1_A$ ☒

1.16 Folgerung: Sei A eine unitale BA. Ist dann $a \in G(A)$ und ist $b \in A$ mit $\|a - b\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$, so ist auch $b \in G(A)$. Insb. ist $G(A)$ offen in A.

Bew: Setze $d := a^{-1}(a-b)$. Dann folgt $\|d\| \leq \|a^{-1}\|\|b-a\| < 1$ und $1_A - d$ ist invertierbar nach 1.15. Dann ist auch $b = a(1_A - a^{-1}(a-b)) = a(1_A - d)$ invertierbar